Solución de los ejercicios de autocomprobación

1. Para resolver esta pregunta sin realizar ningún cálculo adicional, debemos utilizar la relación entre Intervalo de Confianza y Contraste de Hipótesis. Para el mismo nivel de significación, no puede aceptarse que la varianza sea igual a 0,1, ya que dicho valor no se encuentra en el Intervalo de Confianza. Este intervalo nos da todos los valores de σ_0^2 que en un contraste de hipótesis con $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ darían como resultado no rechazar la hipótesis nula.

2. Sea μ el valor medio del *Ibex 35* durante ese periodo de tiempo. Debemos resolver el contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 & : & \mu & = & 0{,}1171 \\ H_1 & : & \mu & \neq & 0{,}1171 \end{cases}$$

Sabemos que la distribución del *Ibex 35* es Normal, pero no conocemos la varianza. Debemos utilizar, por tanto, la medida de discrepancia:

$$d = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Realizamos algunos cálculos:

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 1{,}308, \quad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 0{,}156252, \quad \bar{x} = 0{,}1189$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{0{,}156252 - 11(0{,}1189)^2}{10} = 0{,}0000719, \quad s = 0{,}00847$$

Calculamos $\hat{d}$,

$$\hat{d} = \frac{0{,}1189 - 0{,}1171}{\frac{0{,}00847}{\sqrt{11}}} = 0{,}7048$$

El p-valor es, en este caso:

$$2P(t_{10} > 0{,}7048)$$

Para calcular la $P(t_{10} > 0{,}7048)$ debemos usar la Tabla de la t-Student. Como el valor 0,7048 no figura en la tabla, debemos interpolar entre los valores 0 (que deja a la derecha una probabilidad de 0,5) y 1,372 (que deja a la derecha una probabilidad de 0,1). El resultado es que el valor 0,7048 deja a la derecha una probabilidad de 0,2947, con lo que el p-valor es:

$$2 \times 0{,}2947 = 0{,}589$$

Este p-valor, al ser mayor que 0,2, nos lleva a No Rechazar la H_0, con lo que no rechazamos que la media del *Ibex 35* en ese periodo haya sido igual a 0,1171.

3. Debemos realizar un contraste de hipótesis para comparar las varianzas de los tiempos de conexión en ambos sistemas:

$$\begin{cases} H_0 & : & \sigma_1^2 & = & \sigma_2^2 \\ H_1 & : & \sigma_1^2 & \neq & \sigma_2^2 \end{cases}$$

La medida de discrepancia es $d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{s_2^2}{s_1^2}$. Bajo H_0, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ y $d = \frac{s_2^2}{s_1^2}$ se distribuye como una F_{n_2-1,n_1-1}. Calculamos las cuasivarianzas:

- Sistema 1

$$\sum x_i = 218{,}9, \quad \bar{x} = \frac{218{,}9}{10} = 21{,}89, \quad \sum x_i^2 = 4824{,}71, \quad s_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n_1\bar{x}^2}{n_1 - 1} = 3{,}66544$$

- Sistema 2

$$\sum y_i = 224{,}9, \quad \bar{y} = \frac{224{,}9}{10} = 22{,}49, \quad \sum y_i^2 = 5104{,}49, \quad s_2^2 = \frac{\sum y_i^2 - n_2\bar{y}^2}{n_2 - 1} = 5{,}16544$$

Calculamos $\hat{d} = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{5{,}16544}{3{,}66544} = 1{,}409$

Debemos resolver el contraste a un nivel de significación del 90 %, es decir, $\alpha = 0{,}1$ y, como es bilateral, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$. Necesitamos los percentiles $F_{9,9,0{,}05}$ y $F_{9,9,0{,}95}$. De la Tabla obtenemos $F_{9,9,0{,}05} = 3{,}179$ y

$$F_{9,9,0{,}95} = \frac{1}{F_{9,9,0{,}05}} = \frac{1}{3{,}179} = 0{,}3145$$

La región de aceptación será $(0{,}3145, 3{,}179)$. Como $\hat{d} = 1{,}409$ pertenece a ese intervalo, **no** tenemos evidencias para rechazar H_0 al 90 % de confianza.

En el **apartado b)** nos dan el valor de $\hat{d}$ en un contraste de comparación de medias con varianzas desconocidas pero iguales (ya que en el apartado anterior hemos aceptado H_0). Bajo H_0 esa medida de discrepancia se distribuye como una $t_{n_1+n_2-2} = t_{18}$. Como no nos dan el nivel de significación debemos hallar el p-valor del resultado $\hat{d} = -0{,}638$ en base a la distribución t de Student con 18 grados de libertad. Como el contraste es bilateral, el p-valor es el siguiente:

$$p - valor = P(|t_{18}| \geq |-0{,}638|) = 2P(t_{18} \geq 0{,}638) = 2 \times 0{,}2682 = 0{,}5634$$

Este último valor se obtiene interpolando entre los valores de la tabla $t_{18,0{,}3} = 0{,}534$ y $t_{18,0{,}2} = 0{,}862$. En base a ese p-valor y como es mayor que 0,2 debemos aceptar la igualdad de tiempos medios en ambos sistemas de localización GPS.

4. Debemos resolver el contraste de hipótesis unilateral:

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} H_0 & : & \sigma^2 & = & 1{,}5 \\ H_1 & : & \sigma^2 & < & 1{,}5 \end{array} \right.$$

Como es un contraste sobre la varianza con media desconocida, debemos utilizar la medida de discrepancia:

$$d = \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Realizamos algunos cálculos:

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 215{,}09, \quad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 4220{,}6026, \quad \bar{x} = 19{,}5536$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{4220{,}6026 - 11(19{,}5536)^2}{10} = 1{,}4826$$

Calculamos $\hat{d}$,

$$\hat{d} = \frac{10}{1{,}5} 1{,}4826 = 9{,}88$$

Como no nos dan en el enunciado ningún nivel de significación α, calculamos el p-valor:

$$\text{p-valor} = P(\chi^2_{10} \leq \hat{d}) = P(\chi^2_{10} \leq 9{,}88)$$

Mirando en la tabla de la χ^2, para calcular el p-valor debemos interpolar entre los valores 9,342 y 11,781, que en la χ^2_{10} dejan a la **izquierda** una probabilidad de 0,5 y 0,7 respectivamente. Interpolando obtenemos, aproximadamente:

$$\text{p-valor} = P(\chi^2_{10} \leq 9{,}88) \simeq 0{,}54412$$

Como el p-valor es mayor que 0,2, no podemos rechazar H_0 y concluimos que el nuevo sistema no debe ser considerado para su uso.

5. Tenemos que resolver un contraste de hipótesis para proporciones, o bien, calcular un IC para la proporción real de consumidores de Biodiésel.

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} H_0 & : & p & = & 0{,}3 \\ H_1 & : & p & > & 0{,}3 \end{array} \right.$$

Como el tamaño muestral es grande ($n = 150 > 30$) usamos el teorema central del límite y la medida de discrepancia es:

$$d = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \underbrace{\sim}_{Bajo H_0} N(0,1)$$

Según los datos del problema, $\hat{p} = \bar{x} = \dfrac{66}{150} = 0{,}44$, con lo que:

$$\hat{d} = \frac{0{,}44 - 0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3\times 0{,}7}{150}}} = 3{,}7416$$

La región de rechazo, al ser un contraste unilateral, es $(z_\alpha, +\infty)$. Como $\alpha = 0{,}02$, la región de rechazo es $(2{,}055, +\infty)$. Como $\hat{d}$ pertenece a la región de rechazo, Rechazo H_0 con lo que No rechazo que la proporción real sea mayor que 0,3.

6. Debemos realizar un contraste de comparación de medias de los puntos marcados en casa y en campo contrario. Las hipótesis a contrastar son:

$$\begin{cases} H_0 & : & \mu_1 & = & \mu_2 \\ H_1 & : & \mu_1 & \neq & \mu_2 \end{cases}$$

Como se asume igualdad de varianzas la medida de discrepancia es

$$d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Calculamos las medias muestrales, cuasivarianzas muestrales y cuasivarianza ponderada.

- En casa

$$\sum x_i = 540, \quad \bar{x} = \frac{540}{6} = 90, \quad \sum x_i^2 = 48610, \quad s_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n_1\bar{x}^2}{n_1 - 1} = 2$$

- En campo contrario

$$\sum y_i = 519, \quad \bar{y} = \frac{519}{6} = 86{,}5, \quad \sum y_i^2 = 44927, \quad s_2^2 = \frac{\sum y_i^2 - n_2\bar{y}^2}{n_2 - 1} = 6{,}7$$

$$s_p^2 = \frac{5\cdot 2 + 5\cdot 6{,}7}{10} = 4{,}35 \qquad s_p = 2{,}085$$

y la medida de discrepancia observada $\hat{d}$ es

$$\hat{d} = \frac{90 - 86{,}5}{2{,}085\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = \frac{3{,}5}{1{,}2037} = 2{,}907$$

Como $\alpha = 0{,}05$, buscamos en la tabla de la t-Student el valor $t_{10,0{,}025} = 2{,}228$, y la región de no rechazo es $(-2{,}228, 2{,}228)$. Como $\hat{d}$ se encuentra fuera, tengo evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula, es decir, el número medio de puntos obtenidos depende de la cancha en la que se desarrolle el partido.